**Pumping lemma per i linguaggi liberi da contesto**

Sia L un linguaggio libero da contesto. Allora esiste una costante p, che dipende solo da L, tale che se z è una parola di L di lunghezza maggiore di p (|z|>p), allora z piò essere scritta come uvwxy in modo tale che:

1. |vwx| ≤ p;
2. Al più uno tra v e x è la parola vuota (vx≠λ)
3. ∀i, i ≥0: uviwxiy ∈ L

**Dimostrazione del Pumping lemma per i linguaggi CF**

Sia G (X, V,S,P) una grammatica C.F che genera L. Denotiamo con m il numero dei simboli della più lunga parte destra di una produzione di G: m=max{|v||A → v є P}. Denotiamo con k la cardinalità dell’alfabeto nonterminale di G. k=|V| Poniamo p=mk+1 e sia z є L, con |z|>p.

[(height (Tz) ≤ j ⇒|z| ≤ mj) ⇔(|z|>mj⇒height (Tz)>j)], se |z|>p=mk+1 allora ogni albero di derivazione per z deve avere altezza maggiore di k+1. Dunque, in ogni albero di derivazione per z deve esistere almeno un cammino di lunghezza non inferiore a k+2. Poiché k=|V|, almeno due NT devono comparire duplicati su quel cammino o un NT deve essere ripetuto 3 o più volte sul cammino. Senza ledere la generalità della dimostrazione, denotiamo con A il NT che compare duplicato per ultimo qu quel cammino. Non vi sono pertanto altri NT ripetuti almeno due volte al di sotto della A più in alto (della coppia di A). Questa considerazione implica che il cammino della A più in alto della coppia ad una foglia ha una lunghezza al più k+1. Indichiamo con vwx la sottostringa derivata dal sottoalbero avente radice nella A più alta della coppia, ove w è la sottostringa derivata dal sottoalbero avente radice nella A più bassa della coppia. Supponiamo che m=max {|v||A→v є P}. si ha quindi: |vwx| ≤ mk+1=p, per cui risulta dimostrata la 1. del Pumping lemma.

Scriviamo z nella forma uvwxy, ed applichiamo il principio di sostituzione di sottoalberi. Se sostituiamo al sottoalbero avente radice nella A più alta della coppia quello avente radice nella A più bassa, otteniamo un albero per la stringa: uwy= uv0wx0y che è la 3. del Pumping lemma per i=0.

Se operiamo la sostituzione inversa, otteniamo un albero di derivazione per la stringa: uvvwxxy=uv2wx2y che è la 3. Del Pumping lemma per i=2. Se ripetiamo la suddetta sostituzione i-1 volte, la stringa derivata è: uvv…vwxx…xy=uviwxiy per cui la 3. del Pumping lemma risulta dimostrata. La 2. del Pumping lemma può essere dimostrato per assurdo. Sia: v=λ=x. La sostituzione del sottoalbero avente radice nella A più alta della coppia con quello avente radice nella A più bassa non provoca alcun cambiamento nella stringa z derivata dall’intero albero. Ma tale sostituzione provoca la diminuzione della lunghezza del cammino che dalla A (in origine quella più alto) porta ad una foglia. Dunque anche il cammino di lunghezza non inferiore a k+2 (su cui compariva la coppia di A) nell’albero di osservazione per z risulta accorciato. In questo modo abbiamo ottenuto un albero di derivazione per z con altezza almeno uguale a k+1. Ma questo è assurdo per il fatto che in ogni linguaggio C.F. infinito deve contenere almeno un sottoinsieme infinito di stringhe della forma: uvnwxny con n ≥0